Allgemeine

Methoden der Zinsrechnung.

Ein Beitrag zur politischen Arithmetik.

Inaugural-Dissertation

behufs

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen Staatswirthschaftlichen Facultät

der Universität

München

vorgelegt von

Heinrich Bleicher.

1887.

Allgemeine

Methoden der Zinsrechnung.

Ein Beitrag zur politischen Arithmetik.

Inaugural-Dissertation

behufs

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen Staatswirthschaftlichen Facultät

der Universität

München

vorgelegt von

Heinrich Bleicher.

1887.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Einleitung.

In der Volkswirthschaftslehre wird allgemein der Preis der Nutzung des einem Dritten überlassenen Kapitals als „Zins“ bezeichnet. Der Begriff „Kapital“ selbst wird verschieden definirt. Unseren Zwecken entspricht es am vollständigsten, wenn wir der bekannten Hermann'schen Begriffsbestimmung uns anschliessen, wonach unter Kapital die Grundlage jeder dauernden Nutzung verstanden werden muss. Diese führt sofort dazu, als Zins schlechthin die Nutzung eines Kapitals zu bezeichnen, möge dasselbe verliehen sein oder nicht. Soferne aber das Kapital nur deswegen Bedeutung hat, weil es eine Nutzung abwirft, ist die Grösse der letzteren, also des Zinses, geradezu massgebend für die Bestimmung des Kapitalwerthes.

Alle Zinsen nun, welche in ihrer Gesammtheit das Kapital darstellen, dürfen, da sie zu verschiedenen Zeitpunkten realisirbar sind, nicht ohne weiteres algebraisch summirt werden; sie müssen vielmehr für den Zweck der Summirung auf einen bestimmten Zeitpunkt einheitlich bezogen werden. Nach welchen Grundsätzen dies zu geschehen hat, lehrt die Zinsrechnung.

Die Umstände, unter welchen Kapital und Zinsen zu einander in Beziehung treten, lassen sich nach drei Gesichtspunkten zusammenfassen, welchen die Abschnitte II—IV der vorliegenden Abhandlung entsprechen.

I. Der Zins erscheint in periodischer Wiederkehr immer in gleicher Höhe und das Kapital selbst als solches bleibt immer in der gleichen Form bestehen.

Das Verhältniss des Zinses zur Kapitalhöhe heisst Zinsfuss. Der Zins selbst stellt eine ewige oder immerwährende Rente dar und zwar ist diese identisch mit dem sogenannten reinen Zins — der rohe Zins dagegen ist höher als der reine und zwar um denjenigen Betrag, welcher der wahrscheinlichen Wirkung etwaiger Verluste entspricht. Ein Risico kann sowohl bei eigener Benutzung des Kapitals als auch bei einer Verleihung getragen werden, und dasselbe führt immer zu einer Modification des Zinsfusses.

In der oben angezogenen Bestimmung des Kapitalbegriffes liegt stillschweigend die Voraussetzung, dass die erst in Zukunft eingehenden Bezüge aus demselben zur Zeit um so geringer zu veranschlagen sind, je später sie zu erwarten bleiben. In welchem Maasse deren gegenwärtiger Werth abnehmen muss, damit die Gesammtsumme dieser unendlich vielen Beträge eine eindeutig bestimmte endliche Grösse, nämlich den Kapitalwerth darstellt, ergibt sich später von selbst.

Von ganz allgemeinen Gesichtspunkten ausgehend, wird im II. Abschnitt bewiesen werden, dass die hier besprochene Kapitalisirung des periodischen Zinses auf unbeschränkte Zeit implicite die Voraussetzung der Rechnung mit Zinseszinsen verlangt, welche die Forderung enthält, dass jeder Zins genau in gleichem Maasse werbend wirkt, wie das ursprüngliche Kapital selbst. Das Princip der sogenannten einfachen Zinsrechnung, welche das Zinsergebniss nur proportional der verflossenen Zeit annimmt, vermag die obengenannten Bedingungen nicht zu erfüllen. Dass die Rechnung mit einfachen Zinsen bei längeren Zeiträumen zu Widersprüchen führt, ist in der einschlägigen Literatur, auf welche wir verweisen, zur Genüge dargethan*). Es wird unsere Aufgabe bleiben zu zeigen, dass sich die Rechnung mit Zinseszinsen durch die zwingende Gewalt der Logik von selbst einführt und nur ihre Unterstellung den Aufbau eines einheitlichen Systems für die ganze Zinsrechnung gestattet.

---

*) Beispielsweise ist diese Frage ausführlich behandelt in: Oettinger, Weitere Ausführungen der politischen Arithmetik. Greifswald 1863.

II. Die aus dem Kapital fliessenden Zinsen bilden mit diesem zusammen die veränderte, d. i. vermehrte Grundlage weiterer Produktion.

Nach üblichem Sprachgebrauch sagt man hier: Der Zins wird zum Kapitale geschlagen. Er bildet mit diesem zusammen dasjenige Kapital, welches für die nächste Zinsperiode einen höheren Zins abwirft, als das ursprüngliche Kapital und zwar gerade soviel, als der Zins aus letzterem und der Zins des ersten Zinses, beide nach gleichem Masse berechnet, zusammen betragen. Dieser zweite Zins wird wieder kapitalisirt und so fort bis zu einem bestimmten Schlusstermin, an welchem der so vermehrte Kapitalwerth nach der sich hieraus ergebenden ewigen Rente abgeschätzt werden kann.

Es ist durchaus verfehlt, die allenfalls mit der Kapitalisirung der Zinsen verbundenen praktischen Schwierigkeiten, welche sich nie rechnungsmässig genau feststellen lassen, in der Art berücksichtigen zu wollen, dass man für die Verzinsung des ursprünglichen Kapitals und für diejenige der Zinsen selbst zweierlei Zinsfuss — im letzteren Falle den niedrigeren — zur Grundlage der Rechnung macht. Vielmehr liegt es im Interesse der Einfachheit und verlangt es die Consequenz, einen einheitlichen Zinsfuss für die Bestimmung der Zinsen und der Zinseszinsen zu wählen. Die Höhe desselben muss sich nach den zu erzielenden thatsächlichen Endergebnissen richten.

Den Unterschied zwischen dem nach bestimmter Zeit angesammelten Kapital und dem ursprünglichen, welcher nichts anderes bedeutet, als die Summe der aufgelaufenen Zinsen, wollen wir kurzweg mit „Verzinsung“ innerhalb des betreffenden Zeitraumes bezeichnen, dagegen unter „laufender Verzinsung“ den innerhalb der einzelnen zwischenliegenden Zinstermine erfolgenden Kapitalzuwachs verstehen. Das Verhältniss dieser laufenden Verzinsung zu dem veränderlichen Kapital, aus welchem dieselbe resultirt, ist constant und heisst Zinsfuss.

Die Summe der aufgelaufenen Zinsen wird in den Lehrbüchern der politischen Arithmetik mit „Interusurium“ bezeichnet und gerade hierüber ist wegen der richtigen Bestimmungsweise

desselben: ob man mit einfachen Zinsen, mit Zinseszinsen oder gar mit gemischten Zinsen zu rechnen habe, aus Anlass praktischer, zuerst auf dem Gebiete der Jurisprudenz entstandener Streitfragen die Meinung von jeher getheilt gewesen; der Fachmann erkennt gegenwärtig die Rechnung mit Zinseszinsen ziemlich allgemein als die theoretisch und praktisch einzig berechtigte an. Abgesehen von der mathematischen Begründung führt schon eine allgemeine Ueberlegung zu dieser Ansicht. Denn die Nutzung eines Kapitals soll selbst wieder Tauschwerth haben, ist demnach eigentlich selbst wieder Kapital und die Trennung beider Begriffe erscheint mehr formeller, als sachlicher Natur, sie kennzeichnet im Wesentlichen nur Ursache und Wirkung.

Ist der Begriff des vermehrten Kapitals als Endergebniss einer durch beliebig viele Zeiteinheiten erfolgten Anhäufung der Zinsen und Zinseszinsen festgelegt, so ist anderseits unter dem Jetztwerth eines Kapitals, dessen Höhe nach Umlauf einer bestimmten Frist eine feste Grösse haben soll, diejenige Summe zu verstehen, welche innerhalb dieser Zeit mit ihren Zinsen und Zinseszinsen zu eben diesem Betrage anwächst (discontirter Werth eines Kapitals).

Von diesen Gesichtspunkten aus hat man die Anhäufung mehrerer zu verschiedenen Zeitpunkten fälliger Kapitaleinheiten bis zu einem einheitlichen Schlusstermine zu bewirken oder die Berechnung der Summe vorzunehmen, die in gewissen Perioden fällig sein muss, damit man einen festgesetzten Betrag in bestimmter Zeit erreicht. (Sparkassenanlage und Sparkassenversicherung).

Bei Waldwerthberechnungen und bei Werthbestimmungen von landwirthschaftlichem Gelände, wo der nackte Boden nach seinen zukünftigen Nutzungen geschätzt wird, hat man beispielsweise Fälle, in denen es sich um die gegenwärtige rechnerische Abschätzung von Kapital oder Nutzungswerthen handeln kann, die zur Zeit noch gar nicht vorhanden sind, wohl aber in bestimmter Zeit in Aussicht stehen. Die Diskontirung hat hier im obigen Sinne mit Berücksichtigung aller Zinsen und Zinseszinsen zu geschehen, derart, dass die den

gegenwärtigen Schätzungswerth repräsentirende Summe als ein wirthschaftlich arbeitendes Kapital gedacht ist.

III. Die ursprüngliche Form des Kapitals wird dadurch in eine andere übergeführt, dass in periodischer Wiederkehr sich Theile des Kapitalstammes mit den jeweiligen Kapitalzinsen verschmelzen.

Man hat, soweit man hier von Aufzehrung des Kapitals zu sprechen pflegt, darunter nur die Auflösung der Form desselben und die Ueberführung in eine andere zu verstehen. Beispielsweise sind die Tilgungspläne von Anlehen derart berechnet, dass der Kapitalrest der Schuld immer kleiner wird, bis sich allmählich das Kapital vollständig in die Form der daraus bezogenen Renten aufgelöst hat. Hat man es mit sogenannten unverzinslichen Anlehensloosen zu thun, so wird deren Zins aufgespart und gelangt mit den einzelnen Tilgungssummen in der Form von Gewinnsten zur Rückzahlung.

Fragen der Art treten auf wirthschaftlichem Gebiete weitaus am öftesten auf und man hat für den hier in Anwendung kommenden mathematischen Calcül speziell den Namen Rentenrechnung gewählt. Von dieser formellen Unterscheidung zwischen Zinseszins- und Renten-Rechnung, wie sie öfter gemacht wird, nimmt man besser Abstand; die letztere ist vielmehr nur ein Theil der ersteren, für welche wir den Namen „Zinsrechnung“ überhaupt führen. —

Gerade die Unterscheidung des vorliegenden Stoffes nach den drei erwähnten Gesichtspunkten soll das Verständniss vermitteln, dass die entsprechenden Abschnitte, welche das Gesammtgebiet der Zinsrechnung umfassen, in ihrem Zusammenhange ein organisches Ganze bilden, weil — wie sich zeigen wird — alle Ueberlegungen auf die Identität von Kapital und der Gesammtheit der daraus fliessenden ewigen Renten zurückgeführt werden können.

Bei Bestimmung eines Kapitalwerthes muss man daran festhalten, dass der Unterschied der auf die Gegenwart bezogenen Summen aller zu bestimmten Zeitpunkten erwarteten Einnahmen und Ausgaben diejenige Grösse ist, welche durch

den reinen Zins den thatsächlichen Werth eines Vermögens darstellt. Und anderseits, wenn die so berechneten Ausgaben die Einnahmen übersteigen, so ist die Differenz als dasjenige Kapital zu betrachten, welches nothwendig vorhanden sein muss, um das Gleichgewicht zwischen Activen und Passiven herzustellen.

Die Bestimmung zukünftiger Eingänge und Ausgaben und deren Beziehung auf einen gemeinsamen Zeitpunkt, am einfachsten die Gegenwart, spielt in unserem gesammten Wirthschaftsleben eine ungemein wichtige Rolle. Beruht doch auf derselben das ganze, immer mehr sich auf die breiteren Volksschichten ausdehnende Versicherungswesen. Gerade hier, wo es sich um Verbindlichkeiten handelt, welche in der Gegenwart eingegangen werden und theils erst in sehr weit abgelegener Zeit — wie bei der Lebensversicherung — ihrer Erfüllung harren, wird die Frage nach der richtigen Methode zur gegenwärtigen Bilanzirung künftiger Ausgaben und Einnahmen zu einer überaus wichtigen Principienfrage. Auf diesem Gebiete hat man denn auch die Nothwendigkeit mit Zinseszinsen zu rechnen, anstatt mit einfachen Zinsen, einmüthiger zugestanden, als bei anderen ähnlichen Disciplinen.

Zu der Frage, nach welchen Principien die Zinsen eines Kapitals mit diesen in rechnerische Beziehung zu setzen sind, tritt noch die andere, innerhalb welcher Zeit die Kapitalisirung von Zins und Zinseszins am besten erfolgt. Nun kann die Zeit, innerhalb deren ein Kapital wenigstens werbend wirken kann, eine sehr verschiedene sein und man weiss aus der Praxis, dass, so oft die Principien der Zinseszinsrechnung — in unserem Sinne der Zinsrechnung — in Anwendung zu kommen haben, je nach Belieben die Festsetzung monatlicher, vierteljährlicher, halb- oder ganz-jährlicher Zinstermine gewählt wird.

Hier bleibt ein einheitlicher Gesichtspunkt für die Rechnung zu schaffen.

Um nun beispielsweise eine Zinsanlage mit ganz- und eine solche mit halb-jährlichen Terminen zu vergleichen, ist es noth-

wendig, die eine der beiden Modalitäten rechnungsmässig in die andere überzuführen. Gelingt die Festsetzung einer bestimmten Zeitfrist, welche die Grundsätze der Zinseszinsrechnung in die letzte Consequenz verfolgt und ausserhalb willkürlicher Annahme liegt, so wird am zweckmässigsten jeweils auf diese reducirt. Als solche ergibt sich von selbst und insbesondere nach einer Kritik der einschlägigen mathematischen Formeln die unendlich kleine Zeitperiode, welche zur sogenannten augenblicklichen Verzinsung führt und zur Voraussetzung hat, dass jeder kleinste Theil des Zinses nach Verfluss eines jeden auch noch so kleinen Zeittheiles kapitalisirt wird.

Bei jeder beliebigen anderen Verzinsung aber kann man einen Zinsfuss angeben, welcher bei Annahme einer augenblicklichen Verzinsung die gleiche Wirkung erzielen würde. Wir sehen die letztere demnach als Massstab an, welcher für jede vorkommende Modalität der Verzinsung den Werthmesser abgibt — force of discount bei englischen Schriftstellern — und wenn man sich daran gewöhnen würde, rechnerisch nur in dieser einen Form zu operiren, so hätte man sich die wünschenswertheste Uebersicht über die Rechnung geschaffen. Die Funktion e^z, welche die augenblickliche Verzinsung charakterisirt, wenn man unter e die Basis der natürlichen Logarithmen $= 2{,}71828\ldots$ und unter z den Zinsfuss der Zeiteinheit versteht, führt stets zu einer einfacheren Ausdrucksweise, als alle sonst üblichen Formeln der Zinsrechnung.

Vor Allem muss betont werden, dass man der augenblicklichen Verzinsung, welche gegebenen Falls sogar nur als der formelle Ausdruck einer anderen mit ihr der Wirkung nach gleichen Verzinsung angesehen werden mag, durchaus mehr Interesse entgegen bringen darf, als ihr bis jetzt in den meisten, namentlich in den neueren Lehrbüchern zugewandt wird, in welchen sie oft nur als der Ausfluss einer theoretischen Speculation erscheint*). Man überzeugt sich jedoch leicht, dass die augenblickliche Verzinsung in ihrer Wirkung einen Grenz-

*) Vgl. von älteren Werken: Tetens, Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Leipzig 1785 oder Meyer, Allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Kopenhagen 1823.

werth für die Zinseszinsanlage mit immer kleiner werdenden Zinsperioden bildet, welcher einer in Wirklichkeit noch realisirbaren Verzinsung sehr nahe liegt.

Das Kapital 1 wächst nämlich bei 5 % Zins innerhalb eines Jahres, wenn die Zinstheile

jährlich	kapitalisirt	werden,	an zu	1,05
halbjährlich	„	„	„ „	1,050625
vierteljährlich	„	„	„ „	1,050945
monatlich	„	„	„ „	1,051162*)
täglich	„	„	„ „	1,051267
augenblicklich	„	„	„ „	1,051271

Man erkennt, dass die einzelnen Werthe der Zinsfaktoren dem Maximalwerthe 1,051271 zustreben und dass der Unterschied zwischen monatlicher oder gar täglicher Verzinsung gegenüber der augenblicklichen ein überraschend geringer ist; denn eine monatliche Verzinsung, welche in ihrer Wirkung einer einfachen Jahresverzinsung von 5,1162 % gleichkommt, steht beispielsweise der augenblicklichen mit dem Endergebniss eines einfachen Zinssatzes von 5,1271 % gegenüber, wenn man die Zinstheile eines jährlich auf 5 % festgesetzten Zinsfusses einmal monatlich, das andere mal augenblicklich kapitalisirt. Rechnet man also mit dem Prozentsatze von 5 % pro Jahr, so beträgt die Gesammtabweichung vom einfachen Zinse durch die freigelassene Wahl über die innerhalb eines Jahres liegende Anzahl von Zinsterminen im höchsten Falle erst 0,1271 % des Kapitals oder 2,54 % des niedrigsten Zinsüberschusses. Der Unterschied zwischen täglicher und augenblicklicher Verzinsung würde nur 0,0004 % des Kapitals oder nur 0,008 % des Endwerthes der täglichen Verzinsung betragen.

Umgekehrt ergibt sich, dass eine gleichbleibende thatsächliche Verzinsung von 5 % p. a. erzielt werden kann durch eine jährliche Kapitalisirung des Zinses bei einem Zinsfusse von 5 %

halbjährliche	„	„	„	„	„	„	4,939 %
vierteljährliche	„	„	„	„	„	„	4,909 „
monatliche	„	„	„	„	„	„	4,889 „
tägliche	„	„	„	„	„	„	4,880 „
augenblickliche	„	„	„	„	„	„	4,879 „

*) bei Oettinger irrthümlich mit 1,051114 angegeben.

Von diesem Gesichtspunkte aus lässt sich jede beliebige Verzinsung nach dem einheitlichen Massstabe der augenblicklichen gleichwerthigen Verzinsung beurtheilen. Anderseits würde man, wenn der Prozentsatz der augenblicklichen Verzinsung in runder Zahl gegeben ist, jederzeit Tabellen anlegen können, welche den Zinsfuss für eine beliebige andere Verzinsung nachweisen, welcher der gegebenen augenblicklichen entspricht. So wäre beispielsweise einer augenblicklichen Verzinsung bei einem Jahres-Zinsfuss von 5 % gleichwerthig:

eine jährliche	nach dem Jahreszinsfuss von	5,127 %
„ halbjährliche	„ „ „ „	5,063 „
„ vierteljährliche	„ „ „ „	5,031 „
„ monatliche	„ „ „ „	5,011 „
„ tägliche	„ „ „ „	5,001 „

Gerade die augenblickliche Verzinsung nun, welche ein ununterbrochenes momentanes Wachsthum an Stelle der sprungweisen Anhäufung setzt, entspricht in allen Fällen, wo eine Kapitalvermehrung durch natürliche Bedingungen gegeben ist, und welche in der Regel, um sie rechnerisch festzulegen, nach Jahresprozenten angegeben zu werden pflegt, weit mehr den thatsächlichen Verhältnissen — und ihre Anwendung erscheint um so gerechtfertigter als wir beweisen werden, dass ihr die Rolle einer mittleren Verzinsung zukommt. —

Wenn insbesondere der Werthzuwachs eines Kapitals nur nach längeren Zeitperioden nach seinem Endergebniss angegeben werden kann, erscheint es zweckmässiger als Massstab der Verzinsung den Prozentsatz für die Zeiteinheit unter Voraussetzung augenblicklicher Verzinsung zu wählen, anstatt beliebige andere, im Grunde doch nur willkürliche Annahmen zu machen. Man mag dabei immer im Auge behalten, dass man bei der Augenblicksverzinsung mit Zahlen operirt, welche vollständig innerhalb des Rahmens thatsächlicher Verhältnisse liegen.

Man pflegt in der Praxis, sobald es sich um grössere Summen handelt, beispielsweise eine monatliche Verzinsung anzunehmen, nur der Ueberlegung nachgehend, dass man mit den jeweils disponiblen Kapitalien mehr Zins erzielt, als der gewöhnlichen sonst üblichen vierteljährlichen oder halbjährlichen

Verrechnung derselben entspricht. Diese Voraussetzung monatlichen Umsatzes des Kapitals entspricht aber ebensowenig gerade den thatsächlichen Verhältnissen. Denn die wirthschaftlichen Einrichtungen unserer Zeit sind so mannichfaltiger Natur, dass man die vielseitigste Gelegenheit zur Nutzbarmachung der grössten Kapitalien, wie andererseits — um in Extremen zu sprechen — die verzinsliche Anlage in Sparmarken gesammelter Beträge ermöglicht findet.

Warum sollte man also nicht die letzte Consequenz aus den Principien der Zinseszinsrechnung ziehen und unter entsprechender Modifikation des Zinsfusses von einer augenblicklichen Verzinsung sprechen?

Wie von unendlich kleinen Zinsterminen, so wird man auch von unendlich vielen Rententerminen innerhalb eines Jahres sprechen können. Wittstein beweist in seinem Lehrbuch der Analysis den Satz, dass eine Rente, deren jährliche Beträge in unendlich kleinen Zeitintervallen gleichmässig über das ganze Jahr sich vertheilen, ihrem Kapitalwerth nach sehr nahe einer Rente gleichkommt, die in einer Summe je in Mitte des Jahres fällig wird. Hieraus lässt sich dann der Kapitalwerth einer Rente berechnen, deren Empfänger jeden Tag und jede Stunde den diesem Tage und dieser Stunde entsprechenden Theil des jährlichen Betrages der Rente beanspruchen kann, wie dies bei Naturalverpflegungen vorkommt. —

Indem wir kurz zusammenfassen, sehen wir, dass für das Bestreben, jede Art der Zinswirkung nur durch die Höhe des Zinsfusses, welcher der Zeiteinheit entspricht, auszudrücken, durch die Annahme einer Kapitalisirung des Zinses in seinen kleinsten Theilen thatsächlich ein praktisch sehr wohl berechtigter Ausgangspunkt geschaffen ist. Ganz besonderen Vorzug wird die Funktion, welche den Zinsfaktor für die Zeit t darstellt, nämlich $F(t) = e^{zt}$ noch dadurch erhalten, dass dieselbe hinsichtlich des Zinsfusses und hinsichtlich der Zeit symmetrisch ist, und es ist lediglich das Produkt aus der Zeit in den für die Zeiteinheit angegebenen Zinsfuss, welche als Variable x bei Berechnung der verschiedenen Werthe von $F = e^x$ erscheint.

I. Abschnitt.

Die Zinsfunktion.

§ 1.

Continuirliche oder augenblickliche Verzinsung.

Der Endwerth des Kapitals 1 nach t Zeiteinheiten werde mit F(t) bezeichnet und Zinsfaktor dieser Zeitperiode genannt. Dann ist $\frac{1}{F(t)}$, d. i. dasjenige Kapital, welches in der gleichen Zeit zu 1 anwächst, der Diskontfaktor. Es handelt sich nun darum, bei gegebenem Maasse der Verzinsung, den Zinsfaktor F(t) zu bestimmen.

Die Funktion, welche F(t) darstellt, muss nach unseren Auseinandersetzungen folgende Bedingungen erfüllen:

Unter Zinsfuss war das Verhältniss des momentanen Werthzuwachses zu dem Kapital verstanden, aus welchem sich der Zins jeweilig berechnet. Diese Grösse war als die Constante der Verzinsung erkannt und zwar derart, dass, wenn sie für die Zeiteinheit z beträgt, auf das Zeitmoment z . dt trifft, sobald unter dt das Differential der Zeit verstanden wird. Bedeutet F'(t) den Differentialquotienten des Zinsfaktors nach der Zeit, also F'(t) . dt den momentanen Werthzuwachs, so ist hiernach für jeden beliebigen Werth von t die Gleichung

$$\frac{F'(t)\,dt}{F(t)} = z \cdot dt$$

zu erfüllen. Durch Integration erhält man

$$^{e}\lg F(t) = z \cdot t + c$$

und, indem man $c = \lg C$ setzt,

$$F(t) = Ce^{z \cdot t}$$

Dabei ist die Integrationsconstante durch die Bedingung $F(0) = 1$ bestimmt, da zu Beginn der Verzinsung das Kapital 1 vorhanden sein soll und es wird $c = 0$ beziehungsweise $C = 1$. Demnach gilt ganz allgemein:

$$F(t) = e^{z \cdot t}$$

Indem t alle Werthe von 0 ab durchläuft, gibt $F(t)$ an, zu welcher Grösse das ursprüngliche Kapital 1 innerhalb dieser Zeit anwächst und für alle negativen Werthe von t gibt die Funktion den Werth des Kapitals 1 vor t Zeiteinheiten. Schreibt man t positiv, so ist also der Diskontfaktor

$$D(t) = e^{-z \cdot t}$$

Nun ist bekanntlich

$$e^z = \lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \text{ für } n = \infty$$

$$\text{und } e^{zt} = \lim \left(1 + \frac{zt}{n}\right)^n \quad " \quad " \quad "$$

Der Ausdruck $F(t) = \left(1 + \frac{zt}{n}\right)\left(1 + \frac{zt}{n}\right)\left(1 + \frac{zt}{n}\right) \ldots$ in inf. zeigt, dass der Zinszuschlag thatsächlich als ein augenblicklicher gedacht ist. Das Kapital 1 wächst nach einem beliebig kleinen Zeittheil $\frac{t}{n}$ an zu $1 + \frac{zt}{n}$, dieses Kapital $1 + \frac{zt}{n}$ zu $\left(1 + \frac{zt}{n}\right)^2$ im nächsten Zeittheil u. s. f., bis der Schlusswerth $\left(1 + \frac{zt}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ erreicht ist.

Für die endliche Zeiteinheit $t = 1$ gibt der Funktionswerth

$$F(1) = e^z$$

den Exponenten des geometrischen Verhältnisses, nach welchem bei der besprochenen Zinsanlage von Zeiteinheit zu Zeiteinheit die aufeinanderfolgenden vermehrten Kapitalwerthe fortschreiten, da man auch $F(t) = (e^z)^t$ schreibt.

Hieraus wird ohne weiteres die Bedeutung klar, welche der Basis der natürlichen Logarithmen in der Zinsrechnung zukommt. Denn für $t = \frac{1}{z}$ wird

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = e \text{ bezw. } D\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{e}$$

„Die Basis der natürlichen Logarithmen e gleich 2,71828..... ist der Endwerth des Kapitals 1 sammt Zinsen und Zinseszinsen, welche in den kleinsten Theilen realisirbar gedacht sind, nach Umlauf der Zeit, innerhalb welcher die einfache Summe der Zinsen aus dem Kapitale 1 gerade diesem selbst gleichkommt."

Der reciproke Werth $\frac{1}{e} = 0{,}367879\ldots$ wächst in der gleichen Zeit zu 1 an. —

§ 2.

Discontinuirliche Verzinsung.

Lässt man bei der Darstellungsweise des Zinsfaktors e^z als das n malige Produkt der Grösse $1+\frac{z}{n}$ die Bedingung $n = \infty$ fallen, so deutet sich die Potenz $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ für welche wir symbolisch $F\left(\frac{1}{n}\right)$ schreiben als der Endwerth des Kapitals 1 nach der Zeiteinheit, wenn die aus dem Zinsfuss z sich berechnenden Proportionaltheile den Zinsen nicht augenblicklich, sondern nur je in $\frac{1}{n}$ der Zeiteinheit kapitalisirt werden können. Dann beträgt der Zinsfaktor der Zeit t

$$F\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^{tn}$$

Nur für $n = \infty$ war die Möglichkeit gegeben, dafür

$$\left(1+\frac{zt}{n}\right)^n$$

zu setzen, und es kann hier gleich auf diesen wesentlichen Unterschied der Funktionen $F\left(\frac{t}{\infty}\right)$, wofür wir kurz F(t) geschrieben haben, und $F\left(\frac{t}{n}\right)$ aufmerksam gemacht werden. So lange n endlich bleibt, ist der Zinsfaktor nicht eine hinsichtlich des Zinsfusses und der Zeit symmetrische Funktion.

Die Verzinsung ist derart zu verstehen, dass die Zinsen des werbenden Kapitals $F\left(\frac{t}{n}\right)$, nämlich $F\left(\frac{t}{n}\right)\cdot\frac{z}{n}$, mit diesem zusammen den folgenden Zinsfaktor

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)F\left(\frac{t}{n}\right)=\left(1+\frac{z}{n}\right)^{nt+1}$$

ergeben, wo t auch <1 sein kann.

Es bleibt nun der streng mathematische Beweis dafür zu erbringen, dass man ohne dieses recurrirende Verfahren zum gleichen Endwerthe des Kapitals 1 gelangt, wenn man die Verzinsung desselben und diejenige der einzelnen Zinsen getrennt in die Rechnung einstellt.

Wir schreiben zu diesem Zwecke

$$F\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{r=0}^{r=n}\binom{n}{r}\left(\frac{z}{n}\right)^r$$

als die Entwicklung des Binoms $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$. Dabei ist bekanntlich $\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}$

So bleibt nur die Bedeutung der einzelnen Glieder der Reihe zu untersuchen:

1 ist das ursprüngliche Kapital;

$n\cdot\frac{z}{n}$ ist die Summe aller einfachen ersten Zinsen des Kapitals 1;

$\binom{n}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2$ ist die Summe aller einfachen Zinsen aus den ersten Zinsen $\frac{z}{n}$ des Kapitals, welche der Reihe nach $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... 1mal auftreten.

Man hat nämlich:

$$\frac{z}{n}\left\{(n-1)\frac{z}{n}+(n-2)\frac{z}{n}+\ldots+\frac{z}{n}\right\}=\left(\frac{z}{n}\right)^2\frac{(n-1)n}{2}$$

q. e. d.;

$\binom{n}{3}\left(\frac{z}{n}\right)^3$ ist die Summe aller dritten Zinsen, d. i. aller ersten einfachen Zinsen aus allen zweiten Zinsen.

Man hat nämlich $n-2$mal den Zins $\frac{z}{n}$ aus $\left(\frac{z}{n}\right)^2$

$n-3$ „ „ „ „ „ $2\left(\frac{z}{n}\right)^2$

$n-4$ „ „ „ „ „ $3\left(\frac{z}{n}\right)^2$ u. s. f.

und die Summe ist

$$\left(\frac{z}{n}\right)^3\Big\{(n-2)+(n-3)2+(n-4)3+\ldots.+(n-(n-1))\,(n-2)\Big\}$$
$$=\left(\frac{z}{n}\right)^3\binom{n}{3}$$

Für das allgemeine Glied der Reihe ist die Identität mit der Summe aller vorkommenden rten Zinsen, d. i. aller ersten einfachen Zinsen aus allen vorhergehenden der Ordnung $(r-1)$ zu erweisen.

Man hat nämlich:

$n-r+1$ mal den Zins $\frac{z}{n}$ aus $G_1^{r-2}\left(\frac{z}{n}\right)^{r-1}$

$n-r$ „ „ „ „ „ $G_2^{r-2}\left(\frac{z}{n}\right)^{r-1}$

$n-r-1$ „ „ „ „ „ $G_3^{r-2}\left(\frac{z}{n}\right)^{r-1}$

$\vdots$

1 „ „ „ „ „ $G_{n-r+1}^{r-2}\left(\frac{z}{n}\right)^{r-1}$

wobei G_1^{r-2}, G_2^{r-2}, ... die aufeinander folgenden Glieder der $r-2$ten figurirten Reihe bedeuten. Denn die Zahlen, um die es sich hier handelt, bilden sich aus den Reihen der natürlichen Zahlen durch schrittweise Addition jeden Gliedes zu dem nächsthöheren Glied der vorhergehenden Reihe, so dass jedes mte Glied die Summe aller m Glieder der vorhergehenden Reihe ist:

0te Reihe	1	1	1	1	1	1	. . .
1te „	1	2	3	4	5	6	. . .
2te „	1	3	6	10	15	21	. . .
3te „	1	4	10	20	35	56	. . .

Die Glieder der $r-2$ten Reihe geben als Summen aller Glieder der vorhergehenden Reihe einzeln an, von wie vielerlei Posten $r-1$ten Zinses der nächsthöhere, also rte Zins bis zum Schlusse der n Perioden vorkommt. An den ersten beiden Reihen G^0 und G^1, welche zur Berechnung der Summen aller zweiten und dritten Zinsen dienten, kann man sich diese Ueberlegung durch ein Beispiel klar machen.

Nun gilt die Gleichung

$$G_m^{r-2}=\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\ldots(m+r-3)}{(r-2)\,!}=\binom{m+r-3}{m-1}$$

also $G_1^{r-2}=1 \quad G_2^{r-2}=\frac{2.3..(r-2)(r-1)}{(r-2)!}=r-1 \quad G_3^{r-2}=\frac{(r-1)r}{2}$

u. s. w., und man hat demnach zu summiren:

$$\left(\frac{z}{n}\right)^r\cdot\left\{(n-r+1)\binom{r-2}{0}+(n-r)\binom{r-1}{1}+(n-r-1)\binom{r}{2}+(n-r-2)\binom{r+1}{3}\right.$$
$$\left.+\ \ldots\ +1\cdot\binom{n-2}{n-r}\right\}$$

Das Bildungsgesetz dieser Reihe ist leicht zu erkennen und die Addition derselben gelingt durch eine bekannte Eigenschaft der Binomialcoefficienten, wonach

$$\binom{r}{1}=\binom{r-1}{0}+\binom{r-1}{1}, \quad \text{also} \quad \binom{r-1}{1}=\binom{r}{1}-\binom{r-1}{0}$$
$$\binom{r}{2}=\binom{r+1}{2}-\binom{r}{1}$$
$$\binom{r+1}{3}=\binom{r+2}{3}-\binom{r+1}{2} \quad \text{etc. etc.}$$

Daher schreibt sich die Summe aller rten Zinsen symbolisch

$$\left(\frac{z}{n}\right)^r\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-r}\binom{r+\lambda-1}{\lambda}=\binom{n}{n-r}\left(\frac{z}{n}\right)^r=\binom{n}{r}\left(\frac{z}{n}\right)^r$$

Diese Summe ist also, wie wir beweisen wollten, gleich dem $r+1$sten Gliede der Binomialreihe $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum_{r=0}^{r=n}\binom{n}{r}\left(\frac{z}{n}\right)^r$. Man kann sich durch Ueberlegung in Uebereinstimmung mit der Rechnung klar machen, dass innerhalb der n Zinsperioden ein rter Zins sich so oft ergibt, als die Anzahl der Zinsperioden n sich zu je r gruppenweise zusammenfassen lassen; diese Combinationszahl ist durch $\binom{n}{r}$ gegeben.

Damit ist also bewiesen, dass die Summanden der Binomialreihe nacheinander die sämmtlichen Zinsen neben dem Kapital selbst darstellen. Man gelangt sonach thatsächlich zu dem gleichen Endwerth, wenn man einerseits die jeweils fälligen Zinsen sofort kapitalisirt und aus dem so vermehrten Kapitale die nächsten Zinsen berechnet oder andererseits die einfachen Zinsen aus dem ursprünglichen Kapital sowohl wie aus den anfallenden Zinsen selbst wieder einzeln berechnet und am Schlusse summirt. —

Wenn für die Augenblicksverzinsung die Constante e eine

besondere Deutung erfahren hat, so findet sich für die eben besprochene Verzinsung ein Analogon in der Grösse

$$\varepsilon_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Dabei ist ε_n der Endwerth des Kapitals innerhalb der Zeit, für welche die Summe der ersten Zinsen allein dem Kapitale (= 1) selbst gleichkommt $\left(t = \frac{1}{z}\right)$ und es besteht die Ungleichung:

$$2 < \varepsilon_n < 2{,}71828\ldots$$

Setzt man den speziellen Fall $n = 1$ voraus, macht also die Annahme, dass die Kapitalisirung des Zinses überhaupt nur in der Zeiteinheit erfolgen könne, der angegebene Zinsfuss z demnach den ganzen Kapitalüberschuss darstellt, so ist

$$F\left(\frac{t}{1}\right) = (1+z)^t \text{ und } \varepsilon_1 = (1+z)^{\frac{1}{z}}. -$$

Fragt man allgemein, innerhalb welcher Zeit das Kapital 1 zu m anwächst, so findet man aus

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{xn} = m,$$

$$x = \frac{{}^e\lg m}{n\ {}^e\lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)} = \frac{{}^e\lg m}{z - \frac{z^2}{2n} + \ldots} = {}^e\lg m \left\{\frac{1}{z} + \ldots\right\}$$

Man hat es in der Hand, die Genauigkeit bei Berechnung von x beliebig weit zu treiben; als erster Näherungswerth für x erscheint $x = \frac{\lg m}{z}$, d. i. der exacte Werth für $n = \infty$. Man darf also mit dem Zinsfuss nur in den natürlichen Logarithmus der Zahl m dividiren, um näherungsweise die Zeit zu bestimmen, innerhalb deren ein Kapital durch Zinseszins zum m-fachen Werth anwächst. Dieser Näherungswerth wird für jeden Werth von n durch die augenblickliche Verzinsung gegeben.

Beispielsweise gilt für die Verdoppelung des Kapitals

$$x = \frac{0{,}69315}{z}$$

und dieses Resultat stimmt mit der von Baerlocher*) ange-

*) Baerlocher, Handbuch der Zinseszins-, Renten-, Anleihen- und Obligationen-Rechnung. Zürich 1886.

führten Regel überein, dass man mit dem Prozentsatze der Verzinsung in die runde Zahl 70 dividiren müsse, um zu erfahren, innerhalb welcher Zeit sich ein Kapital verdoppelt.

Für $m = e$ hat man für jeden Werth von n als Näherungswerth $x = \frac{1}{z}$, welcher wiederum für die Augenblicksverzinsung den exacten Werth darstellt. Wenn man die Wirkung verschiedener Zinsanlagen vergleichen will, fragt man also zweckmässig darnach, innerhalb welcher Zeit das Endresultat gleich e wird und man hat dann nur die reciproken Werthe der Zinssätze zu vergleichen.

§ 3.

Die augenblickliche Verzinsung als typische Form.

Die Verzinsung $F\left(\frac{t}{n}\right)$ lässt sich durch eine gleichwerthige augenblickliche F(t) ersetzen, sobald nur die Relation

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{nt} = e^{\zeta t}$$

erfüllt wird, d. h. der Zinsfuss der Augenblicksverzinsung bestimmt sich aus z als

$$\zeta = n \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

$$\text{bezw. } \frac{\zeta}{n} = \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right).$$

$\frac{\zeta}{n}$ und $\frac{z}{n}$ sind gleichwerthige Zinsfüsse für $\frac{\zeta}{n}$ unter der Voraussetzung der Kapitalisirung des Zinses in seinen kleinsten Theilen, während $\frac{z}{n}$ den einfachen Zinszuschlag in $\frac{1}{n}$ der Zeiteinheit bedeutet.

Schreibt man $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{nt} = e^{\varphi_{\frac{1}{n}} \cdot z \cdot t}$, so ist $\varphi_{\frac{1}{n}}$ als der Quotient aus den gleichwerthigen Zinsfüssen $\frac{\zeta}{n}$ und $\frac{z}{n}$ definirt:

$$\varphi_{\frac{1}{n}} = \frac{\lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}}$$

Dieser Quotient spielt die Rolle eines Reductionsfaktors hinsichtlich beider Verzinsungsarten. Dabei ist zu bemerken, dass $\varphi_{\frac{1}{n}}$ entweder angibt, in welchem Verhältniss der Zinsfuss z zu reduciren ist, wenn man an Stelle der sprungweisen Verzinsung die augenblickliche setzt und den gleichen Endwerth in gleicher Zeit verlangt, oder aber $\varphi_{\frac{1}{n}}$ gibt an, in welchem Verhältniss bei augenblicklicher Verzinsung die Verzinsungsdauer reducirt werden darf, ohne das Endergebniss zu ändern.

Die wesentlichen Vortheile der Funktion e^{zt} kommen hier wieder zur Geltung. —

Die Vergleichung zweier beliebiger Verzinsungsmodalitäten ist unmittelbar durch das Verhältniss der einschlägigen Faktoren φ gegeben, denn wenn $\varphi_{\frac{m}{n}}$ die Zeit ist, welche das Kapital 1 bei Annahme von n Zinsterminen innerhalb der Zeiteinheit auf Zinseszins stehen muss, damit es den gleichen Endwerth gibt, wie bei m Terminen nach der Zeit 1, so ist

$$\varphi_{\frac{m}{n}} = \frac{\varphi_{\frac{1}{m}}}{\varphi_{\frac{1}{n}}} = \frac{\lg\left(1+\frac{z}{m}\right)}{\frac{z}{m}} \cdot \frac{\frac{z}{n}}{\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

Für diesen einfachen Fall überzeugt man sich leicht, dass der Gleichung

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = \left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)^x$$

der Werth $\varphi_{\frac{m}{n}}$ oder $x = \frac{m}{n} \cdot \frac{\lg\left(1+\frac{z}{m}\right)}{\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)}$ entspricht.

Weniger einfach gestaltet sich die Sache, wenn man die mfache und die nfache Verzinsung derart in Beziehung setzen wollte, dass man nach dem Zinsfuss $\psi \cdot z$ fragt, welcher bei n Terminen einen Endwerth liefert, welcher der Verzinsung mit m Terminen bei gegebenem Zinsfuss z entspricht. Man ersieht sofort, dass aus der Gleichung

$$\left(1+\psi\frac{z}{n}\right)^n = \left(1+\frac{z}{m}\right)^m$$

ein Werth

$$\psi = \frac{\left(1 + \frac{z}{m}\right)^{\frac{m}{n}} - 1}{\frac{z}{n}}$$

(gleich dem Verhältniss der Interusurien in der Zeit $\frac{1}{n}$ bei den zweierlei Verzinsungsmodalitäten) sich ergibt, mit welchem sich weit weniger leicht operiren lässt, wie mit den Faktoren φ, da sich die letzteren auf die Zeit und den Zinsfuss beziehen, ψ dagegen nur auf letzteren. —

Der Zinsfuss $\zeta = n \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ werde Zinskraft des Zinsfusses z genannt; er gibt an, welcher augenblicklichen Verzinsung, die doch das Maximum leistet, jene mit endlichen Zinsterminen gleichkommt.

Für den Fall $n = 1$, geht der Faktor φ_n über in

$$\varphi = \frac{\lg (1+z)}{z}$$

d. h. die Augenblicksverzinsung $\varphi z = \zeta$ und die einfache z geben den gleichen Kapitalendwerth, nämlich $1 + z$; ζ ist der denkbar niedrigste Zinsfuss, auf die Zeiteinheit berechnet, welcher diesen Endwerth ermöglicht.

Für diesen speziellen Fall besteht noch eine interessante Beziehung.

Lässt man nämlich den Zinsfaktor F alle Werthe zwischen dem ursprünglichen Kapital und dem Endwerth F durchlaufen und bestimmt das arithmetische Mittel aller einschlägigen Diskontfaktoren, d. i. den Mittelwerth aller Kapitalien, welche in der Zeiteinheit bei wechselnder Höhe der Verzinsung zu 1 anwachsen, so ist dasselbe als der Quotient zweier bestimmten Integrale gegeben, nämlich:

$$D_m = \frac{\int_1^F \frac{dF}{F}}{\int_1^F dF} = \frac{\lg F}{F - 1}$$

Ersetzt man hierin F durch $1 + z$, so bedeuten die zu $z = 0$ bis $z = z$ gehörigen Werthe von F die Zinsfaktoren der Zeiteinheit wenn der Zinsfuss zwischen 0 und z sich stetig ändert

oder wenn man anderseits jeden Proportionaltheil von z als den auf die entsprechende Zeitquote treffenden einfachen Zins auffassen will, bedeuten sie den Zinsfaktor für diesen Proportionaltheil der Zeit 1.

Da nun hierfür speziell

$$D_m = \frac{\lg(1+z)}{z} = \varphi,$$

so ist das arithmetische Mittel der Diskontfaktoren beim einfachen Zins z, wenn man dieselben für alle zwischen 0 und 1 gelegenen Zeitmomente berechnet, gleich dem Verhältniss der gleichwerthigen Zinsfüsse ζ und z.

Anderseits ergibt sich durch Anwendung der Logarithmenreihe in der genügend convergenten Form:

$$\lg \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdot\cdot\right),$$

wenn man $\frac{1+x}{1-x} = 1+z$ setzt und sich auf das erste Glied der Reihenentwicklung beschränkt:

$$\lg(1+z) = \frac{z}{1+\frac{z}{2}} + \ldots$$

$$\varphi = \frac{\lg(1+z)}{z} = \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \ldots$$

d. h. das besagte arithmetische Mittel aller Discontfaktoren kann näherungsweise durch den nach Massgabe der einfachen Verzinsung gebildeten Discontfaktor für die Hälfte der Zeiteinheit ersetzt werden und die Zinskraft $\zeta = \lg(1+z)$ ist nichts anderes als der näherungsweise berechnete Werth für den am Schlusse der Zeiteinheit — des Jahres — entfallenden Zins in Mitte desselben.

Ganz analog würde man $\varphi^{\frac{1}{n}}$ näherungsweise durch $\frac{1}{1+\frac{z}{2n}}$ ersetzen.

Die Grösse φ wird uns übrigens später bei Berechnung der Kapitalwerthe augenblicklicher Renten aus jenen für Renten mit endlichen Terminen wieder entgegentreten. —

Der einer beliebigen Verzinsung mit endlicher Anzahl von Terminen gleichwerthige Augenblickszinsfuss ζ ist abhängig von den beiden Bestimmungsstücken z und n.

Nimmt man zunächst n constant und fragt nach den Aenderungen von ζ, wenn z variabel, so lässt sich von vornherein sagen, dass sich jede Zunahme im Zinsfuss z beim entsprechenden Zinsfuss ζ nur in geringerem Maasse wiederspiegeln kann. Und in der That folgt aus

$$\frac{\zeta}{n} = \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

$$d\zeta = \frac{dz}{1 + \frac{z}{n}} \quad \text{oder} \quad d\left(\frac{\zeta}{n}\right) = \frac{d\left(\frac{z}{n}\right)}{1 + \frac{z}{n}},$$

was unsere Behauptung erweist. Dabei ist bemerkenswerth, dass der Zinsfaktor $1 + \frac{z}{n}$ sich als der Differentialquotient der einfachen Verzinsung nach der gleichwerthigen augenblicklichen darstellt.

Lässt man anderseits den Zinsfuss z unveränderlich, dagegen n variiren, so folgt aus

$$\frac{d\zeta}{dn} = \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{\frac{z}{n}}{1 + \frac{z}{n}},$$

dass dieser Ausdruck stets positiv bleiben muss, aber mehr und mehr abnimmt. Es ist nämlich

$$\frac{d\zeta}{dn} = \frac{\zeta}{n} - \frac{\frac{z}{n}}{1 + \frac{z}{n}}$$

und hierin stellt das zweite Glied den vorauszahlbaren Zins*) für die Zeit $\frac{1}{n}$ dar, welcher offenbar kleiner sein muss als der Zins $\frac{\zeta}{n}$, da dieser in Summe seiner kleinsten Theile erst innerhalb der Zeit $\frac{1}{n}$ jenem gleichwerthig wird.

Die Zunahme der Zinstermine innerhalb der Zeiteinheit

*) Siehe Abschnitt II.

wird demnach, wenn z constant bleibt, in dem Zinsfuss der gleichwerthigen Augenblicksverzinsung eine mit wachsendem n kleiner werdende Zunahme bewirken.

§ 4.

Zur Construction von Zinstafeln.

Die allgemein üblichen Zinstafeln zerfallen in zwei Gruppen: erstens diejenigen, welche die Zinsen aus dem Kapitale 1 für kurze Zeitperioden, gewöhnlich für die einzelnen Tage eines Jahres angeben unter der Voraussetzung, dass bei einer jährlichen Verzinsung von z für das Kapital 1 auf t Tage eine solche von $\frac{t \cdot z}{365}$ treffe und hiernach der entsprechende Zinsfaktor $1 + \frac{t \cdot z}{365}$ beträgt.

Die entsprechenden Diskontfaktoren finden sich dann als die Werthe $\frac{1}{1 - \frac{t\,z}{365}}$, welche man anderseits auch in der bei der eigentlichen Dskontrechnung beliebten Form $1 - \frac{tz'}{365}$ geben kann.

Die zweite Gattung von Tafeln, welche auf der Verrechnung der Zinseszinsen beruhen, construiren sich aus der Formel

$$(1 + z)^m,$$

wenn m die Anzal der Jahre gibt, innerhalb deren der jährlich mit z aus dem Kapital 1 entfallende Zins selbst kapitalisirt wird. Ganz analog berechnet man den Endwerth des Kapitals 1 nach einem Jahr — der Zeiteinheit —, wenn die Zinstheile je in Raten glich $\frac{1}{n}$ des jährlichen Betrages kapitalisirt werden können, nach der Formel

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n;$$

fragt man also nach em Endwerth eines Kapitals nach Verlauf von x Tagen innerhalb des Jahres, wenn x zwischen der λ und $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$ Zinsperide liegt, so erhält man durch Combination der zweierlei besaten Zinstafeln, wenn $t < \frac{365}{n}$,

$$F_x = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{\lambda} \left(1 + \frac{zt}{365}\right)$$

Sind mehrere Zeiteinheiten m und darüber x Tage verflossen, so ist der eben gewonnene Faktor noch mit der Grösse $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{mu}$ zu multipliciren.

Man ersieht schon hieraus, wieviel zweckmässiger es wäre, auch für jeden Bruchtheil der $\frac{1}{n}$ der Zeiteinheit umfassenden Zinsperiode den Zinsfaktor in der Form der Potenz zu schreiben und demnach als Zinsfaktor für x Tage den Ausdruck $F_x = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{\frac{n.x}{365}}$ zu setzen.

Ueber die Langwierigkeit einerseits und die Inkonsequenz dieser Formeln andererseits gelangt man durch die Annahme der augenblicklichen, d. i. continuirlichen und gleichmässigen Verzinsung ohne Weiteres hinweg.

Denn in dem Ausdrucke

$$F = e^{zt}$$

kann nun t jeden beliebigen Werth, grösser oder kleiner als die Zeiteinheit, annehmen und das Produkt des Zinsfusses für die Zeiteinheit in die verschiedenen Werthe von t gibt unmittelbar, als Exponent von e aufgefasst, in der zugehörigen Potenz den dieser Zeit entsprechenden Zinsfaktor.

Handelt es sich also beispielsweise um die Construktion einer Tafel, welche die Zinsfaktoren von Tag zu Tag bei einem angegebenen jährlichen Zinssatze enthält, so ergeben die zu der Vielfachen von $\frac{z}{365}$, welche als Logarithmen einer Tafel mit der Basis e aufgefasst werden, zugehörigen numeri unmittelbar die Zinsfaktoren selbst; durch die complementären Logarithmen, d. i. für die negativen Werthe der Exponenten, erhält man die zugehörigen Diskontfaktoren. Eine solche Logarithmentafel, wie sie beispielsweise im Thesaurus logarithmorum completus von Vega, Leipzig 1794, als Wolframii „Tabula logarithmorum naturalium“ oder auch bei Callet, Tables portatives de logarithmes, Pris chez Didot 1795 zu finden ist, könnte demnach — für den speziellen Zweck ent-

sprechend eingerichtet — unmittelbar die Stelle einer Zinstafel vertreten. — Die im Anhang gegegebenen, gekürzten Tafeln der Zinsfaktoren selbst für die verschiedenen Tage eines Jahres unter der Annahme einer augenblicklichen Verzinzung dürften sich insbesondere bei Berechnung der Schlusswerthe einer Sparkasseneinlage empfehlen. Was die Höhe des Zinsfusses anlangt, so kann derselbe jederzeit entsprechend der einmaligen Bestimmungsgleichung $z = n \lg \left(1 + \frac{z'}{n}\right)$ so gewählt werden, dass das auf ein Jahr entfallende Endergebniss einen durch andere Modalitäten der Verzinsung bestimmten Werth erhält. —

Wird der Zinsfaktor $e^{\zeta t}$ gesucht für einen Werth von ζ, welcher nicht in der berechneten Zinstafel enthalten ist und heisst der ζ zunächst liegende, in der Tafel vertretene Zinsfuss ζ_1, wo $\zeta > \zeta_1$ sein mag, so erhält man näherungsweise:

$$e^{\zeta t} = e^{\zeta_1 t} + (\zeta - \zeta_1)\, t \left\{1 + \frac{\zeta + \zeta_1}{2} \cdot t\right\}$$

wie man sich durch die bekannte Reihenentwicklung für $e^{\zeta t}$ leicht überzeugt.

Wenn t grösser als 1 ist, wird dieser Näherungsgrad im Allgemeinen nicht genügen, dagegen für $t \leqq 1$, also etwa wenn es sich um die Berechnung der Zinsfaktoren innerhalb eines Jahres handelt, sehr gut brauchbar sein.

Ist die Differenz zwischen ζ und ζ_1 gering, so erhält man beispielsweise für $t = 1$ schon durch die allererste Annäherung, wonach die Correktur an e^{ζ_1}, um den Näherungswerth von e^{ζ} zu berechnen, einfach $\zeta - \zeta_1$ beträgt, einen praktisch zulässigen Werth; die zweite Annäherung, wonach das additive Glied

$$(\zeta - \zeta_1)\left\{1 + \frac{\zeta + \zeta_1}{2}\right\}$$

beträgt, ergibt den Werth für e^{ζ} auf 4 bis 5 Dezimalstellen genau, verbürgt also noch die Hundert- bezw. Tausendtheile des gleichwerthigen procentualen Jahreszinsfusses*).

---

*) z. B. ergibt sich aus dem Zinsfaktor für $\zeta_1 = 5\,\%$ $e^{0{,}05} = 1{,}05127$ derjenige für $\zeta = 5^1/_4\,\%$ mit $1{,}05127 + 0{,}0025 \cdot 1{,}05125 = 1{,}05390$, was mit dem für $e^{0{,}0525}$ direkt berechneten Werth übereinstimmt. Der erste Näherungswerth würde sein:

$$1{,}0513 + 0{,}025 = 1{,}0538\ . \ —$$

II. Abschnitt.

Kapital und ewige Rente.

§ 5.

Grundformeln für ewige Renten.

Der absolute Werthzuwachs des Kapitals 1 in der Zeit t in Folge der angesammelten Zinsen ist $\Phi(t) = F(t) - 1$. Derselbe ist je am Ende der Zeitperiode t überschüssig und durch diesen Zinsüberschuss wird je nach Verlauf der Zeit t aus dem Kapital 1 immer wieder die gleiche Summe in Form einer Rente nutzbar gemacht. Diese Rente, am Ende der Zeitperiode, also nachzahlbar gedacht, ist eine immerwährende oder ewige. Da man aber ferner jederzeit ein beliebiges Kapital als ein vermehrtes in Beziehung auf einen vorhergehenden Zeitpunkt ansehen kann, so lässt sich in Analogie der Gleichung

$$F(t) = 1 + \Phi(t)$$

auch das Kapital 1 in ein anderes kleineres und eine daraus fliessende, ewige nachzahlbare Rente zerlegen, nämlich:

$$1 = \frac{1}{F(t)} + \frac{\Phi(t)}{F(t)} = \frac{1}{F(t)} + \left(1 - \frac{1}{F(t)}\right)$$

In dieser Form bedeutet $\frac{1}{F(t)}$ dasjenige Kapital, welches nach der Zeit t zu 1 anwächst und es ist demnach der Klammerausdruck, nämlich

$$A(t) = 1 - \frac{1}{F(t)}$$

so lange es sich nur um die Erhaltung des Kapitals auf der Höhe der Wertheinheit handelt, mit Rücksicht auf die Verzinsung innerhalb der nächstfolgenden t Zeiteinheiten, eine von vornherein überschüssige Grösse oder eine vorauszahlbare, ewige Rente. Man überblickt sofort, dass der für die Zeit

t aufgezinste Werth der vorauszahlbaren Rente dem der nachzahlbaren gleichkommt. Demnach gilt der Satz:

„Ein Kapital kann stets in zwei Theile zerlegt werden, von welchen der eine mit seinen Zinsen nach beliebig gewählter Zeit dem vollen Werth des ursprünglichen Kapitals gleichkommt, während der Rest mit den auf ihn in der gleichen Zeit entfallenden Zinsen zusammen die vollen Zinsen des ursprünglichen Kapitals darstellt."

In der Möglichkeit, die Theilung eines Kapitals in der angegebenen Weise stets zu wiederholen, ist das Wesen der vorauszahlbaren ewigen Renten begründet. Wir lernen also, wenn wir die auf die Zeit t entfallende Verzinsung jeweils vom Kapitalstamm trennen, zweierlei Formen derselben kennen, welche inhaltlich sich decken müssen: die Rechnung mit vorausgezahlten und jene mit nachgezahlten Zinsen. Keine verdient den Vorzug vor der anderen, obwohl man ziemlich allgemein mit nachzahlbarem Zins zu rechnen sich gewöhnt hat. Doch dürften die Fälle, wo Zinsen im Voraus erhoben werden, auch in der Praxis keineswegs selten sein.

Man sagt also, aus dem Kapital 1 fliesse alle t Zeiteinheiten der vorauszahlbare Zins $\Delta(t) = 1 - \frac{1}{F(t)} = 1 - D(t)$ oder gleichbedeutend der nachzahlbare Zins $\Phi(t) = F(t) - 1$.

Im ersteren Falle, wo $D(t) = 1 - \Delta(t)$, nennt man $\Delta(t)$ den Discontoabzug des Kapitals 1 für die Zeit t, d. i. der Abzug, den man am Kapitale (= 1) macht, wenn die Realisirung desselben auf einen um t Zeiteinheiten zurückgelegenen Zeitpunkt eintreten soll und man erkennt, wie sich die sogenannte einfache kaufmännische Discontrechnung unter diesen Fall unterordnet. Im Gegensatze hiezu hat man die Zinsrechnung im gewöhnlichen Sinne des Wortes unter der Gleichung $F(t) = 1 + \Phi(t)$ inbegriffen.

Für den einfachsten Fall mag ein Zahlen-Beispiel den gegenseitigen Zusammenhang zwischen $\Delta(t)$ und $\Phi(t)$ klar machen:

Für $t = 1$ soll $F = 1{,}04$ den Zinsfaktor darstellen, wobei eine Voraussetzung über die Art der Zinswirkung nicht gemacht

werden braucht. Dann ist $D = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}96154$ und $\Delta = 1 - 0{,}96154 = 0{,}03846$, dagegen $\Phi = 0{,}04$; zur Probe findet man auch $\Delta = \frac{0{,}04}{1{,}04} = 0{,}03846$. Die vorausgezahlten Zinsen zu 3,846 % und die nachgezahlten zu 4 % gerechnet, sind also gleichwerthig*). Die Sprachweise der Discontrechnung sagt: ein Kapital, welches erst nach Umlauf der Zeiteinheit flüssig wäre, hat jetzt den Werth $1 - 0{,}3846$, wenn man mit einer nachzahlbaren Verzinsung von 4 % rechnet. Man bemerkt nebenbei, wie widersinnig es wäre, den Zins durchweg proportional der Zeit zu nehmen. Denn dann liesse sich die endliche Zeit $x = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{1 - D}$ angeben, derart, dass eine erst nach der Zeit x fällige Summe den gegenwärtigen Werth 0 hat.

Allgemein dient zur Umsetzung der nachzahlbaren in die vorauszahlbare Verzinsung und umgekehrt die Gleichung:

$$\Delta(t) = \frac{\Phi(t)}{1 + \Phi(t)} \quad \text{bezw.} \quad \Phi(t) = \frac{\Delta(t)}{1 - \Delta(t)}$$

Wenn nun $\Delta(t)$ und $\Phi(t)$ ewige Renten aus dem Kapital 1 sind, so bedeuten die reciproken Werthe $\frac{1}{\Delta(t)}$ und $\frac{1}{\Phi(t)}$ diejenigen Kapitalwerthe, aus welchen die ewigen vorauszahlbaren, beziehungsweise nachzahlbaren Renten im Betrage 1 mit der Zeitperiode t sich ergeben. Demgemäss verstehen wir unter

V_e^t den Kapitalwerth der im Betrage 1 von t zu t Zeiteinheiten fälligen vorausbezahlbaren ewigen Rente, und unter

N_e^t den Kapitalwerth der entsprechenden nachzahlbaren:

$$V_e^t = \frac{F(t)}{F(t) - 1} = \frac{1}{1 - D(t)} \quad \text{und}$$

$$N_e^t = \frac{1}{F(t) - 1} = \frac{D(t)}{1 - D(t)}$$

Thatsächlich zinst sich, wenn man dem Kapitalwerthe V_e^t die Rente 1 entnimmt, der Rest $V_e^t - 1$ wieder zu V_e^t auf, da wird.

$$(V_e^t - 1)\, F(t) = V_e^t$$

*) Beispielsweise vergleiche man Spitzer, Tabellen der Zinseszins- und Rentenrechnung, Wien bei Gerold 1865, 1875 und 1887.

Anderseits, wenn man das Kapital N_e^t aufzinst und hiernach die Rente 1 entnimmt, so bleibt als Rest N_e^t, da

$$N_e^t \cdot F(t) - 1 = N_e^t$$

sich erweist.

Man sieht, wie sich diese Operation ins Unendliche fortsetzen lässt und der Begriff der ewigen Rente sich hierdurch rechtfertigt.

Die Kapitalwerthe für die vorauszahlbare und nachzahlbare ewige Rente 1 unterscheiden sich natürlich um 1, d. i. den vollen einmaligen Betrag der Rente:

$$V_e^t = N_e^t + 1$$

Man bemerkt ferner, dass das Verhältniss $V_e^t : N_e^t$ zum Zinsfaktor F(t) zurückführt und dieser sich geradezu als das Verhältniss der Kapitalwerthe vorauszahlbarer und nachzahlbarer Renten mit der Fälligkeitsperiode t definiren liesse. Der entsprechende Diskontfaktor D(t) wäre das Verhältniss der vorausgezahlten und nachgezahlten Zinsen. —

Setzt man $t = 1$, so erhält man in den Grössen

$$V_e = \frac{F}{F-1}, \qquad N_e = \frac{1}{F-1}$$

die Kapitalwerthe für ewige Renten, die von Zeiteinheit zu Zeiteinheit im Betrage 1 fällig sind. Specialisiren wir noch weiter, um die geläufigsten Beispiele anführen zu können, so sei allenfalls $F = 1 + z$, wo man unter z einen einfachen Zinszuschlag versteht. Dann ist $N_e = \frac{1}{z}$ d. i. der reciproke Werth des Zinsfusses unter dem Namen Perpetuität als das Kapital bekannt, welches jährlich, d. i. eben je nach Ablauf der Zeiteinheit, den Zins 1 abwirft unter der Voraussetzung, dass gar keine Zinsen admassirt werden. —

Die Ableitung der Kapitalwerthe V_e und N_e wird gewöhnlich durch Summation unendlicher Reihen gegeben. Denn die aufeinanderfolgenden Potenzen der Discontfaktoren $D = \frac{1}{F}$, $D = \frac{1}{F^2}$ u. s. w. geben in ihrer Summe den Baarwerth einer

solchen ewigen Rente, wenn man die Voraussetzung macht, dass die Zinsen je in der Zeiteinheit kapitalisirt werden können. Darnach ist

$$N_e = \frac{1}{F} + \frac{1}{F^2} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{in inf.}$$

$$V_e = 1 + \frac{1}{F} + \frac{1}{F^2} + \quad . \quad . \quad . \quad \text{in inf.}$$

Diese Reihen summiren sich aber, da $F > 1$, bekanntlich in

$$N_e = \frac{1}{F-1}$$

$$V_e = \frac{F}{F-1}$$

Bei der von uns gegebenen Ableitung für die allgemeinste Formel V_e^t, N_e^t ist über die Art der Zinswirkung, wie F aus dem ursprünglichen Kapital 1 sich bildet, keine Voraussetzung gemacht; die Annahme, von der wir ausgingen, war lediglich die, dass das Kapital 1 in der Zeit t stets den gleichen Zins abwirft. Die rein begrifflich hieraus abgeleiteten Werthe der kapitalisirten ewigen Renten stimmen mit dem Ergebniss der Reihensummirung, welche die Rechnung mit Zinseszinsen, nicht aber einfachen Zinsen erfordert, überein und es zeigt sich, dass die Annahme eines unendlich oft wiederkehrenden, periodischen Zinses aus einem bestimmten Kapitale implicite die Principien der Zinseszinsrechnung verlangt. Man dürfte nur versuchen wollen, die sogenannte harmonische Reihe

$$\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+2z} + \frac{1}{1+3z} + \quad . \quad . \quad .$$

zu summiren, welche einfachen der Zeit proportionalen Zinszuschlag in infinitum annimmt*), um sich zu überzeugen, dass dieselbe, trotzdem ihre Glieder immer kleiner werden, keinen geschlossenen Werth repräsentirt. Man hat demnach, wenn die Nutzniessung eines Kapitals eine dauernde sein soll, allen Zins, welcher nicht in die Form der Rente übergeht, als werbendes Kapital aufzufassen. —

*) Ausführlicheres bei Lehr, Waldwerthrechnung und Statik. Zweiter Band des Handbuches für Forstwissenschaft von Lorey. Tübingen 1886.

Wenn wir den Zinsfaktor F(t) in der gewählten Schreibweise $e^{\zeta t}$ ausdrücken, finden wir als den allgemeinsten Ausdruck für den Kapitalwerth einer ewigen Rente, welche je im Betrage 1 in Zeitperioden von t Einheiten, vorauszahlbar oder nachzahlbar, fällig wird:

$$V_e^t = \frac{e^{\zeta t}}{e^{\zeta t} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\zeta t}} \text{ beziehungsweise}$$

$$N_e^t = \frac{e^{-\zeta t}}{1 - e^{-\zeta t}} = \frac{1}{e^{\zeta t} - 1}$$

Dabei ist ζ der Zinsfuss für die Zeiteinheit und kann an die Gleichung

$$\frac{\zeta}{n} = \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

gebunden sein, aus welcher für $n = \infty$ $\zeta = z$ sich ergibt.

Den in den gebräuchlichen Tabellenwerken berechneten Tafeln dürften zweckmässig auch solche der Werthe V_e^t oder N_e^t beigegeben werden.

§ 6.

Ewige Renten mit ratenweiser Zahlung.

Der Betrag der Rente 1, welcher für die Zeit t berechnet war, kann innerhalb dieser Zeit in beliebigen Quoten fällig sein. Es fragt sich, wie gross der Kapitalwerth einer solchen ewigen Rente ist. Die Anzahl der Rententermine in der vollen Periode also in der Zeit t sei r; der Zinsfaktor für die Zeit $\frac{t}{r}$ sei $e^{\frac{\zeta t}{r}}$.

Wir können dann unmittelbar die Formeln des vorigen Paragraphen anwenden auf eine ewige Rente im Betrage $\frac{1}{r}$, so dass wir erhalten:

$$V_e^{\frac{t}{r}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{\zeta t}{r}}} \text{ und } N_e^{\frac{t}{r}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\zeta t}{r}} - 1}$$

Ist also beispielsweise nach dem Kapitalwerthe einer ewigen Rente gefragt, welche zu r gleichen Theilen je innerhalb der Zeit t im Betrage 1 fällig sein soll unter der Annahme, dass der Zinsfuss für die Zeit 1 z beträgt und der Zins n mal

kapitalisirt werden kann, so löst sich diese Aufgabe mit den gegebenen allgemeinen Formeln, wenn man die weitere $\frac{\zeta}{n} = \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ hinzu nimmt; nämlich:

$$V_{\frac{e}{n}}^{\frac{t}{r}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-\frac{nt}{r}}} \quad \text{und} \quad N_{\frac{e}{n}}^{\frac{t}{r}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{\frac{nt}{r}} - 1}$$

Soll die Rente eine augenblickliche sein, d. i. in den kleinsten Theilen erhoben werden, so ist klar, dass die Kapitalwerthe der vorauszahlbaren und nachzahlbaren Renten gleich sein müssen. Für $r = \infty$ nimmt aber das Produkt $r\left\{e^{\frac{\zeta t}{r}} - 1\right\}$ zunächst den unbestimmten Ausdruck $\infty \times 0$ an, dessen wahrer Werth sich als $\zeta \cdot t$ erweist und es ist also

$$N_{\frac{e}{n}}^{\frac{t}{\infty}} = V_{\frac{e}{n}}^{\frac{t}{\infty}} = \frac{1}{\zeta t}$$

Setzt man der Kürze halber $t = 1$, so ergibt sich die Reciproke des Zinsfusses ζ als der Kapitalwerth einer augenblicklichen Rente, deren kleinste Theile in der Zeit 1 zusammen die Wertheinheit repräsentiren. Die Wahl der Zinstermine steht hierbei noch frei; nur ist ζ an die Gleichung $\frac{\zeta}{n} = \lg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ gebunden. Wird auch die Anzahl der Zinstermine ∞, so erhält man $(V_e) = (N_e) = \frac{1}{z}$, wozu man den unten folgenden Satz vergleichen mag.

Dass $\frac{1}{\zeta}$ der Kapitalwerth für eine augenblickliche Rente im Gesammtbetrage 1 ist, unter der Voraussetzung, dass je der Zinstheil $\frac{z}{n}$ kapitalisirt wird, leitet sich direkt dadurch ab, dass unter ζ der Gesammtbetrag der augenblicklichen Zinsen verstanden war, deren kleinste Theile eine augenblickliche Rente aus dem Kapitale 1 darstellen, wenn dieselben der n fachen Verzinsung $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ gleichwerthig waren. —

Als spezieller Fall bleibt nun derjenige zu behandeln, in welchem Zinstermin und Rententermin zusammenfallen, d. i.

wenn $tn - r$ wird und r — die auf die Zeit t entfallende Anzahl der Termine — eine positive ganze Zahl ist. Dann wird

$$V^{t}_{e\frac{n}{n}} = \frac{1}{nt} \cdot \frac{1}{1-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}}$$

$$N^{t}_{e\frac{n}{n}} = \frac{1}{nt} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{1}-1}$$

und für $t = 1$

$$V_{e\frac{n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}} = \frac{1}{z} \cdot F = N_e F \text{ wo } F = 1+\frac{z}{n}$$

$$\text{dagegen } N_{e\frac{n}{n}} = \frac{1}{z} = N_e$$

Die letztere Gleichung besagt:

„Der Kapitalwerth einer ewigen nachzahlbaren Rente im Betrage 1 ist unabhängig von der Anzahl der Zins- und Rententermine, sobald letztere zusammenfallen.“

Für vorauszahlbare Renten gilt der Satz ersichtlich nicht. Rechnet man aber mit vorausgezahlten Zinsen, so dass nun die Zinstermine und Rententermine sowohl für die Zeiteinheit als innerhalb derselben aufeinanderfallen, so kehrt sich das Verhältniss gerade um:

„Unter der Voraussetzung, dass die Zinsen im Voraus erhoben werden, ist der Kapitalwerth einer vorauszahlbaren ewigen Rente 1 unabhängig von der Anzahl der zwischenliegenden Renten- und Zinstermine, falls dieselben zusammentreffen.“

§ 7.

Veränderliche ewige Renten.

Wir hatten es bisher mit Renten zu thun, deren Betrag immer gleich der Wertheinheit oder deren Theilbeträge einem unveränderlichen Bruchtheil der Wertheinheit gleichkommen. In der Praxis kommen auch steigende und fallende Renten vor, und zwar kann hierbei die verschiedenartigste Gesetzmässigkeit vorgeschrieben sein. Wir beschränken uns auf

die Darstellung der in geometrischer oder arithmetischer Progression veränderlichen ewigen Renten.

Aendert sich die Rente im geometrischen Verhältnisse λ, so muss $\lambda < 1$ sein, wenn der Kapitalwerth ein endlicher Ausdruck sein soll. Zur Bestimmung des Kapitalwerthes der ewigen vorauszahlbaren Rente $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3 \ldots$ in inf., bedienen wir uns einer ähnlichen Ueberlegung wie in § 5, welche zur Bestimmung der gleichbleibenden ewigen Rente führte: Wir zerlegen nämlich den Kapitalwerth 1 in einen Theil, der nach der Zeit t — der Rentenperiode — zu λ anwächst, dann ist der andere überschüssige Theil eine vorauszahlbare Rente.

An die Stelle des Kapitals 1 tritt nach t Zeiteinheiten λ, dann nach weiteren t Zeiteinheiten λ^2 u. s. f., so dass sich im gleichen Verhältnisse auch die vorausgezahlten Zinsen — Renten aus dem entsprechenden Kapitale — reduciren.

Aus $$1 \equiv \frac{\lambda}{F(t)} + \left(1 - \frac{\lambda}{F(t)}\right)$$

folgt der reciproke Werth des zweiten Gliedes direkt als der gesuchte Kapitalwerth der Rente:

$$_{\lambda}V_{e}^{t} = \frac{F(t)}{F(t) - \lambda} \quad \text{und hieraus} \quad _{\lambda}N_{e}^{t} = \frac{1}{F(t) - \lambda}$$

Der reciproke Werth von $_{\lambda}N_{e}^{t}$ ist hierbei der jeweils nach der Zeit t verfügbare Zinsüberschuss; denn wenn die Rente im Verhältniss λ fallen soll, so ist zu ihrer Gewähr auch nur ein je im Verhältniss λ reducirtes Kapital nöthig; der Ueberschuss über den Endwerth des Kapitales 1, nämlich $F(t)$, also $F(t) - \lambda$, ist eine ewige nachzahlbare fallende Rente aus dem Kapitale 1 mit der Periode t.

Der Unterschied zwischen der in geometrischem Verhältnisse fallenden und der gleichbleibenden ewigen Rente drückt sich, wie man leicht erkennt, dadurch aus, dass an die Stelle des gewöhnlichen Diskontfaktors $\frac{1}{F(t)}$ der reducirte $\frac{\lambda}{F(t)}$ tritt.

Bei Betrachtung der in arithmetischer Reihe steigenden oder fallenden Rente gehen wir von dem einfachsten Falle aus, in welchem die Beträge der vorauszahlbaren oder nachzahlbaren

Rente die Glieder der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5 ... sein sollen.

Die Kapitalwerthe derselben werden mit ${}_{+1}V_e^t$, ${}_{+1}N_e^t$ bezeichnet. Indem je nach Ablauf der Rentenperiode t der Betrag der Rente um die Einheit steigt, ist es nothwendig, dass für jede Rentenerhöhung, welche sich auf die Zeit ∞ erstreckt, der Kapitalwerth ${}_{+1}V_e^t$ bezw. ${}_{+1}N_e^t$ als Aequivalent eintritt. Der Kapitalwerth der steigenden ewigen Rente ist demnach nichts anderes als der gegenwärtige Kapitalwerth eines zu jedem Rententermine fälligen Kapitalbetrages in der Höhe von V_e^t bezw. N_e^t:

$$ {}_{+1}V_e^t = V_e^t \times V_e^t = (V_e^t)^2 $$

$$ {}_{+1}N_e^t = V_e^t \times N_e^t = F(t) \times (N_e^t)^2 $$

Man hat demnach den Satz:

„Der Kapitalwerth einer mit dem Betrage 1 beginnenden, in bestimmten Perioden fälligen und je um den gleichen Betrag 1 über alle Grenzen wachsenden ewigen Rente ist gleich dem Quadrat des Kapitalwerthes der gleichbleibenden vorauszahlbaren Rente 1 — oder gleich dem Produkte aus den Kapitalwerthen der vorauszahlbaren und nachzahlbaren gleichbleibenden ewigen Rente 1, je nachdem es sich um eine vorauszahlbare oder nachzahlbare steigende Rente handelt.“

Auf Grund der für ${}_{+1}V_e^t$, ${}_{+1}N_e^t$ gegebenen Formeln lassen sich diejenigen für ewige Renten, die in beliebiger anderer arithmetischer Progression sich ändern, ableiten.

Nimmt die im Betrage 1 sofort beginnende Rente je um den Betrag d ab, so zerlegt man beispielsweise, um deren Kapitalwerth zu bestimmen, die gleichbleibende Rente 1 in zwei andere, davon die eine die besagte ist, die andere nachzahlbare dagegen mit d beginnt und je um den gleichen Betrag steigt:

$$\begin{aligned} V_e^t &= {}_{-d}V_e^t + d \cdot {}_{+1}N_e^t \\ {}_{-d}V_e^t &= V_e^t - d \cdot {}_{+1}N_e^t \\ &= V_e^t - d \cdot V_e^t \cdot N_e^t \\ &= V_e^t \{ 1 - d \cdot N_e^t \} \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat nur Sinn, so lange der Klammerausdruck positiv, also $d < \frac{1}{N_e^t}$ bleibt; d. h. die Differenz der fallenden Rentenbeträge darf den aus dem Betrage 1 in der Zeit t sich ergebenden Zinsüberschuss $= \frac{1}{N_e^t}$ nicht überschreiten.

Die steigende Rente führt uns nun folgendermaassen zu unserem Ausgangspunkte zurück:

Lässt man den Betrag der Rente nicht gleich der Wertheinheit sein, sondern gleich dem Zinsüberschusse hieraus in der Zeit t, gleich $\Phi(t) = F(t) - 1$ und steigt derselbe jedesmal um Φ, so erhält man, wenn wir statt $\Phi(t)$ kurzweg Φ schreiben:

$${}_{+\Phi}N_e^t = \Phi \times {}_{+1}N_e^t = \Phi \cdot V_e^t \cdot N_e^t$$

Nun ist aber doch $\Phi \times N_e^t = 1$, also reducirt sich dieser Werth auf:

$${}_{+\Phi}N_e^t = V_e^t$$

Verlangt man, dass die Rente erstmals dem Betrage der vorausgezahlten Zinsen der Zeitperiode t gleichkomme und um diesen Betrag gleichmässig steigt, so hat man

${}_{+\Delta}V_e^t = \Delta \cdot (V_e^t)^2$ und hierbei ist $\Delta \cdot V_e^t = 1$ und man erhält:

$${}_{+\Delta}V_e^t = V_e^t$$

Diese Gleichungen für ${}_{+\Phi}N_e^t$ und ${}_{+\Delta}V_e^t$ bringen nichts anderes als die Identität von Kapital und daraus fliessenden Renten zum Ausdruck:

Man kann statt der gleichbleibenden ewigen Rente 1 aus dem Kapitale V_e^t eine gleichmässig steigende Rente mit dem Anfangswerthe gleich dem vorausgezahlten oder nachgezahlten Zins aus dem Kapital 1 beziehen.

Diese steigenden Renten sind die Summe der

Zinsen, welche aus den in infinitum gewährleisteten Rentenbeträgen 1 sich berechnen würden.

Um ein ganz einfaches Beispiel zu geben, überzeuge man sich, dass man aus dem Betrage von ℳ 26.—, welcher bei 4 % jährlichem nachzahlbaren Zins den Kapitalwerth einer jährlich im Betrage 1 vorauszahlbaren Rente repräsentirt, statt dessen eine steigende ewige nachzahlbare Rente in folgenden Sätzen erheben kann: nach 1 Jahr 4 ₰, nach 2 Jahren 8 ₰, nach 3 Jahren 12 ₰, nach x Jahren 4 x ₰ u. s. f. in infinitum oder statt dessen auch vorausgezahlt x . 0,3864 ₰. —

Druck von G. Bernstein in Berlin.